Notice d’utilisation pour le calcul de charge limite

Résumé

L’objectif de cette note est de donner les informations nécessaires pour qu’un utilisateur puisse réaliser des calculs de charge limite avec *Code_Aster*.

La première partie rappelle les grandes lignes de la méthode et ses propriétés.

La deuxième partie présente les différentes étapes nécessaires à la mise en œuvre dans *Code_Aster*.

Finalement, la troisième partie présente quelques remarques de mise en œuvre en s’appuyant sur le cas-test *Aster* [V6.04.124] et sur le cas industriel visant à déterminer la pression limite pour un joint de cuve Canopy.

Table des matières

1 Introduction

Ce document vise à guider l'utilisateur pour la mise en œuvre d'un calcul d'analyse limite avec *Code_Aster* et complète la documentation disponible dans *Code_Aster* sur l'analyse limite qui consiste en les :

- document de référence : [R7.07.01] ;
- documents de validation SSNV124A [V6.04.124] et SSNV146 [V6.04.124] ;
- document de formation : Rubrique Formation du site www.code-aster.org

Pour ce faire, le *Code_Aster* utilise :

- une approche cinématique régularisée (méthode de régularisation de Norton-Hoff-Friaâ, cf [1]) pour le critère de résistance de Von Mises (réglage par un coefficient de régularisation dont la valeur limite conduit à la convergence) ;
- des éléments finis quasi-incompressibles ;
- une résolution statique non linéaire par pilotage paramétrique ;
- le post-traitement pour obtenir une estimation des valeurs supérieure $\lambda_{\mathrm{lim}}^{\mathrm{sup}}$ et inférieure $\lambda_{\mathrm{lim}}^{\mathrm{inf}}$ qui encadrent la valeur limite λ_{lim} .

Le présent document est composé de trois parties :

1) la première partie qui rappelle les grandes lignes de la méthode et ses propriétés ;
2) la deuxième partie qui présente les différentes étapes nécessaires à la mise en œuvre dans le *Code_Aster* ;
3) la troisième partie qui présente quelques remarques de mise en œuvre en s'appuyant sur le cas-test *Aster* [V6.04.124] et sur le cas industriel visant à déterminer la pression limite pour un joint de cuve Canopy.

2 Les grandes lignes de la méthode

2.1 Présentation

Les objectifs de l'analyse limite sont :

- l'analyse de sécurité face à un comportement extrême (Etat Limite Ultime E.L.U.) ;
- le dimensionnement rapide sans chercher à décrire l'ensemble du processus de ruine ;
- la caractérisation énergétique de la ruine et la compréhension des modes de ruine ;
- l'obtention d'une information simple sur l'évolution non linéaire du matériau de la structure.

L'analyse limite est un problème que l'on peut traiter de deux manières, cf. [8], [9], [10] :

- calcul de ruine « plastique » de structures élastoplastiques avec plateau ductile. Le trajet de chargement et le modèle de comportement du matériau doivent être décrits entièrement. ;
- calcul de perte de potentialité d'équilibre à critère de résistance donné, pour une direction de chargement donnée. Il s'agit d'un problème d'optimisation (sous

contrainte) du paramètre de charge λ . Cette approche est appelée « calcul à la rupture ».

Pour les matériaux standards, ces deux méthodes donnent le même résultat.

Le « calcul à la rupture » ou « analyse limite » (vocable désignant le calcul à la rupture dans le cas d'un matériau élastoplastique à règle d'écoulement normal) vise à déterminer directement, de façon simplifiée et sans avoir recours à la description du trajet de chargement par un calcul incrémental élastoplastique onéreux, la frontière du domaine de ruine plastique (et par déduction le domaine des charges supportables) pour une structure Ω , de géométrie et de limites de résistance des matériaux données, soumise à un chargement donné par sa direction $\mathbf{F}$, et d'amplitude paramétrée par le réel positif λ . Un chargement « permanent » $\mathbf{F_0}$, comme par exemple la pesanteur, peut éventuellement être présent en plus (sans être amplifié par λ).

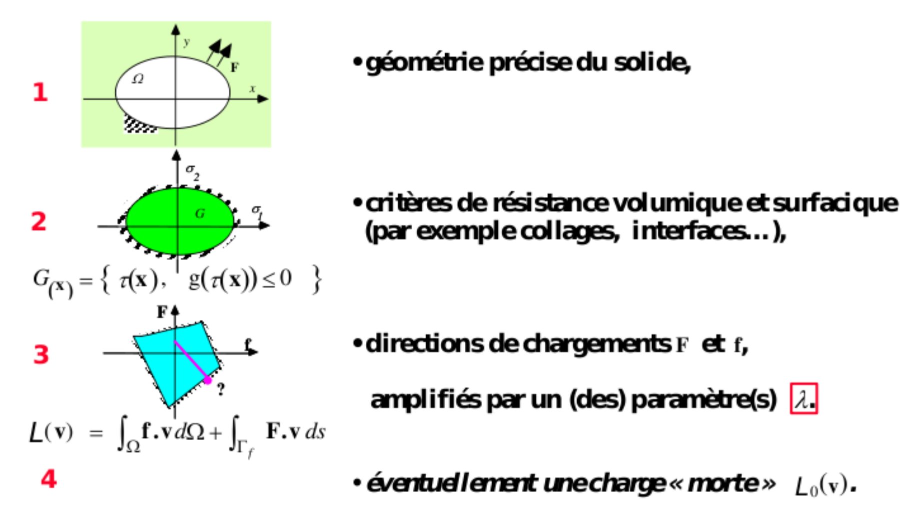


Figure 2.1-a : Ingrédients du calcul à la rupture.

Remarque 2.1-1 :

On ne peut pas tenir compte d'un quelconque changement de géométrie par le calcul à la rupture, comme cela arrive lors d'une ruine par flambage, ou pour un solide très souple… Cela constitue les hypothèses de la méthode : la configuration du solide est celle de sa géométrie initiale, les liaisons de la structure sont supposées données et fixes jusqu'à la ruine ; de même les chargements, en efforts uniquement, sont de directions fixées.

Deux approches du calcul à la rupture sont accessibles :

- l'approche statique qui estime la valeur de charge limite par l'intérieur et qui nécessite la construction des champs de contraintes statiquement admissibles, ce qui est délicat en général par éléments finis. Elle consiste à maximiser le (ou les) paramètre(s) de chargement à la condition que les équations (linéaires) de la statique restent vérifiées et que le critère en contraintes ne soit pas violé ;
- l'approche cinématique, duale de la précédente, qui estime la valeur de charge limite par l'extérieur et qui nécessite une minimisation par une méthode de

régularisation du (ou des) paramètre(s) de chargement sous la condition que la puissance des efforts extérieurs reste supérieure à la puissance résistante, (définie à partir du critère de résistance), d'une fonctionnelle non régulière, qui doit en conséquence être régularisée dans le cas général.

L'emploi combiné (cas idéal !) de ces deux approches fournit des encadrements de la charge limite.

2.2 Un exemple analytique [7]

On considère un système hyperstatique à trois barres : voir [fig. 2.2-a], les barres ont un critère de résistance identique, exprimé en terme d'effort normal (ou tension) N : $g(N)=|N|\leq\bar{N}$.

Le point D est soumis à une force $\vec{F}$ de composantes (F_x, F_y) non nulles, amplifiée par un facteur multiplicatif λ .

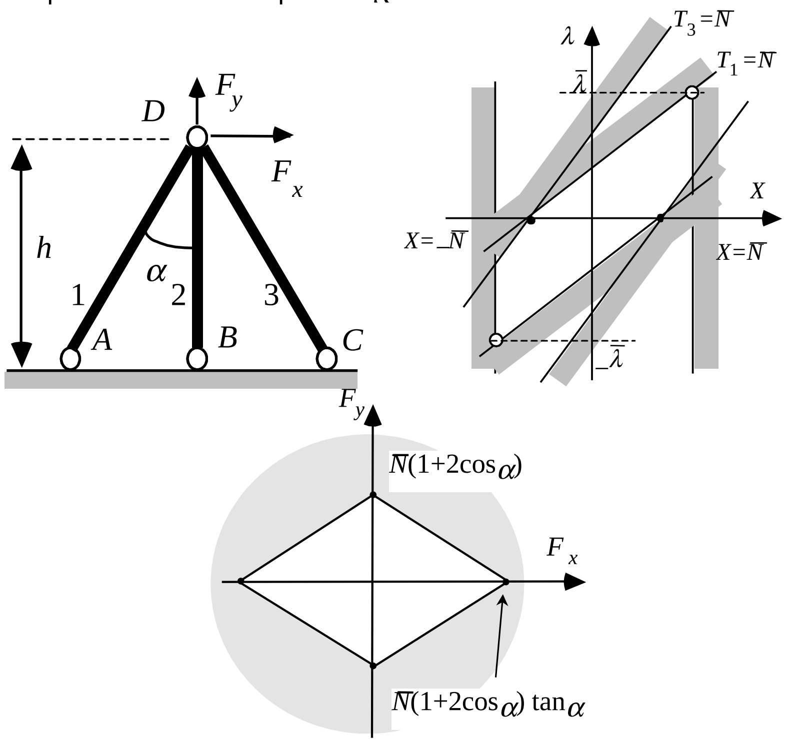


Figure 2.2-a : à gauche : système à trois barres ; au milieu : domaine des tensions supportables ; à droite domaine des chargements supportables.

L'espace de solutions statiquement admissibles (les tensions T_i dans les barres) est défini par les équations :

$$\begin{cases} T_1 = \dfrac{\lambda\left(F_x \cos\alpha + F_y \sin\alpha\right) - X \sin\alpha}{\sin 2\alpha} \\ T_2 = X \\ T_3 = \dfrac{\lambda\left(F_y \sin\alpha - F_x \cos\alpha\right) - X \sin\alpha}{\sin 2\alpha} \end{cases}$$

Pour λ positif, on constate que c'est en $T_1 = T_2 = \bar{N}$ que l'extremum est atteint, voir [fig. 2.2-a]. On trouve ainsi que la valeur maximale supportable du facteur de charge λ (ou charge limite), obtenue par l'approche statique, est :

$$\bar{\lambda} = \bar{N} \frac{\left(1 + 2\cos\alpha\right)\sin\alpha}{F_x \cos\alpha + F_y \sin\alpha}$$

L'approche cinématique donne le même résultat [6] : c'est bien la charge limite de ce problème.

2.3 Quelques propriétés utiles du calcul de charge limite

Dans le cas idéal, les bornes supérieure et inférieure de la charge limite doivent être égales à la valeur limite. Avec l'approche numérique, on aura toujours un écart et c'est la borne inférieure qui est la plus pénalisante. Il est cependant à noter que, pour les structures dont on peut conduire le calcul suffisamment loin (comme dans les cas tests), la borne supérieure est en pratique celle qui est la plus proche de la valeur exacte.

On choisit fréquemment comme seuil de résistance la limite d'élasticité : cela va dans le sens de la sécurité.

On rappelle ci-après quelques propriétés utiles du calcul de charge limite (voir [4], [8]) :

- la charge limite est proportionnelle à la valeur de la limite de résistance ou seuil σ_y dans un solide homogène. Elle ne dépend pas de l'histoire du chargement subi par la structure au préalable ;
- comme le critère de résistance est convexe (critère de von Mises), le domaine des chargements supportables (donc la frontière des chargements limites) dans l'espace des chargements est convexe. On peut donc approcher le domaine des chargements admissibles par le polyèdre généralisé construit sur les sommets, correspondant chacun à une direction choisie dans l'espace des chargements ;
- les conditions de Dirichlet (un déplacement imposé) qui sont appliquées sur la partie Γ_u du bord $d\Omega$ de la structure, ou une déformation anélastique initiale – thermique, plastique…– n'ont pas d'effet sur le domaine des charges admissibles, (la ruine étant l'impossibilité de satisfaction de l'équilibre, le mode de ruine correspond à une vitesse-direction d'écoulement) ;
- la charge limite ne dépend pas de la présence éventuelle d'un champ de contraintes auto-équilibrées (contraintes résiduelles) ;
- pour un solide bidimensionnel, le matériau et la direction de chargement étant donnés, une borne inférieure obtenue par l'approche statique en contraintes planes est nécessairement inférieure à la charge limite exacte obtenue en déformations planes : $\lambda^{-}_{C_{PLAN}} \leq \lambda^{\lim}_{D_{PLAN}}$;

- pour un solide bidimensionnel, le matériau et la direction de chargement étant donnés, une borne supérieure obtenue par l'approche cinématique en déformations planes est nécessairement inférieure à la charge limite exacte obtenue en contraintes planes : $\lambda^{+}_{D_{PLAN}} \geq \lambda^{\lim}_{C_{PLAN}}$. Ce résultat fournit donc un majorant. Si l'on souhaite traiter un problème en contraintes planes, il est nécessaire alors de faire l'approche cinématique sur une modélisation tridimensionnelle d'une « tranche » de solide ;
- les charges limites obtenues en 2D déformations planes avec le critère de Tresca valent $\sqrt{3}/2$ fois celles trouvées avec le critère de Von Mises ;
- à géométrie et direction de chargement données, si on remplace dans une zone donnée de la structure le matériau de domaine de résistance G_1 par un matériau de domaine de résistance $G_2 \subset G_1$ ($g_2(\tau) \leq g_1(\tau)$) (par exemple : critère de Tresca inclus dans celui de Von Mises), alors les fonctions d'appui (puissances résistantes maximales) sont : $\pi_2(\varepsilon(v)) \leq \pi_1(\varepsilon(v))$ et donc : $\lambda^{\lim}_2 \leq \lambda^{\lim}_1$;
- en particulier si on remplace un défaut 1 (trou, fissure) présent dans la structure par le défaut 2 contenant le défaut 1, alors on a : $\lambda^{\lim}_2 \leq \lambda^{\lim}_1$. De même, si la structure est hétérogène, avec deux zones dont les limites de résistance sont $\sigma_{y1} \leq \sigma_{y2}$, la charge limite sera supérieure à celle de la même situation homogène pour le seuil σ_{y1} et inférieure à celle pour le seuil σ_{y2} ;
- en présence d'une direction de chargement $f = \lambda(\alpha f_1 + (1-\alpha) f_2)$ combinant deux directions f_1 et f_2 , $\alpha \in [0, 1]$, alors la charge limite exacte vérifie : $\lambda^{\lim}(\alpha) \geq \bar{\lambda} = \dfrac{\lambda^{\lim}_1 \lambda^{\lim}_2}{(1-\alpha)\lambda^{\lim}_1 + \alpha \lambda^{\lim}_2}$. Ce résultat reste valable pour des approximations par l'intérieur des charges limites.

Alors que les situations tridimensionnelles générales sont inabordables analytiquement, en 2D déformations planes (`D_PLAN`) et contraintes planes (`C_PLAN`) il est possible de construire à la main et de calculer des solutions pour l'approche statique et l'approche cinématique, à l'aide de champs construits par blocs, qui donnent des encadrements de la charge limite : ceci se révèle utile pour corroborer un résultat obtenu par éléments finis.

3 La mise en œuvre de l'analyse limite dans *Code_Aster*

3.1 Les étapes de calcul

Pour réaliser une analyse limite dans *Code_Aster*, il faut :

- utiliser un maillage 2D (plan ou axis) ou 3D compatible avec les éléments finis incompressibles ;
- définir le modèle avec les éléments finis incompressibles ;
- définir la limite de résistance du matériau σ_y ;
- définir le chargement permanent $\mathbf{F_0}$ et le chargement variable $\mathbf{F}$ qui est piloté par λ ;
- définir la condition d'incompressibilité ;
- réaliser un calcul non-linéaire avec le comportement incrémental et le pilotage prévus pour l'analyse limite ;
- post-traiter le calcul pour obtenir les valeurs supérieure et inférieure de la charge limite estimée.

3.2 Maillage

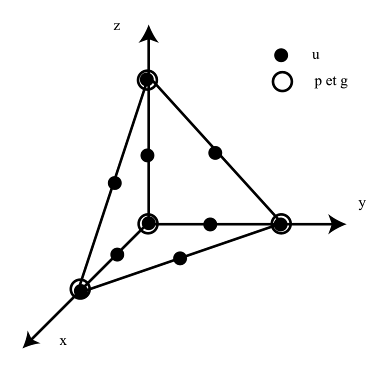
Les éléments incompressibles [R3.06.08] peuvent s'appliquer sur les mailles de type suivant :

Géométrie du problème	**Type de mailles**	**Nombre de nœuds**	
		en déplacements	en pression et gonflement
2D 2D axixymétrique	TRIA6	6	3
	QUAD8	8	4
3D	HEXA20	20	8
	TETRA10	10	4
	PENTA15	15	6

Les composantes accessibles pour le champ `DEPL` sont :

- les déplacements :`DX`, `DY` (et `DZ` en 3D) à tous les nœuds ;
- la pression : `PRES` pour les nœuds sommet ;
- le gonflement : `GONF` pour les nœuds sommet.

Les degrés de liberté en déplacement sont portés par tous les nœuds, en revanche, seuls les nœuds sommets possèdent les degrés de liberté *p* et *g*.



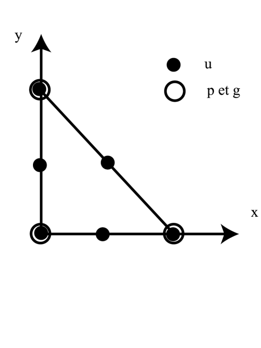


Figure 3.2- 3.2-a : Illustration des nœuds en déplacements (*u*) et en pression et gonflement (*p* et *g*) pour les mailles de type TETRA10 et TRIA6.

Remarque 2.2-1 :

> *Comme il faudra imposer une condition aux limites sur le gonflement, les nœuds sommets doivent donc être parfaitement identifiés dans le maillage :*
> - *soit dès la phase de conception et de réalisation du maillage ;*
> - *soit, plus simplement et a posteriori, en faisant appel dans Code_Aster à la commande* `DEFI_GROUP` *[U4.22.01] avec le mot-clé* `CREA_GROUP_NO` *en précisant le groupe de mailles d'éléments incompressibles et en utilisant l'option* `CRIT_NOEUD = 'SOMMET'` *.*

3.3 Modèle

3.3.1 Options de modélisation

Les 3 modélisations possibles dans *Code_Aster* avec les éléments finis incompressibles sont appelées par la commande `AFFE_MODELE` [U4.41.01] en utilisant les options suivantes :

Géométrie du problème	Option de modélisation
3D	'3D_INCO_UPG'
2D en déformations planes	'D_PLAN_INCO_UPG'
2D axisymétrique	'AXIS_INCO_UPG'

3.3.2 Condition d'incompressibilité

Pour exprimer la condition d'incompressibilité, on utilise la commande `AFFE_CHAR_MECA` [U4.44.01] avec le mot-clé `DDL_IMPO` pour imposer à la composante `GONF` du groupe des nœuds sommets des éléments incompressibles de rester nulle.

3.4 Matériau

Le matériau utilisé pour l'analyse limite dans *Code_Aster* avec les éléments incompressibles est un matériau avec un critère de Von Mises, élastoplastique parfaitement plastique.

Les données des caractéristiques de matériaux sont fournies sous le mot clé facteur `ECRO_LINE` de la commande `DEFI_MATERIAU` [U4.43.01].

La pente de la courbe de traction (E_T) est choisie nulle (opérande `D_SIGM_EPSI`), la seule donnée nécessaire à fournir est donc la limite d'élasticité (c'est-à-dire le seuil de résistance dans notre cas) (opérande `SY`).

3.5 Chargement

Le chargement variable $\mathbf{F}$ qui est piloté par λ doit nécessairement être de type effort (force, pression, pesanteur) ([R5.03.80]) et déclaré dans la commande `AFFE_CHAR_MECA` [U4.44.01].

Si la structure est aussi soumise à un chargement permanent $\mathbf{F_0}$, il faut penser à le rappeler lors du post-traitement (voir [§3.8]).

3.6 Liste d'instants

La liste d'instants sert à contrôler la méthode de régularisation de Norton-Hoff, cf. [1], [5], par l'intermédiaire d'un coefficient m , et non pas l'évolution du chargement comme lors d'un calcul ordinaire :

$$m=1+10^{1-t}$$

de sorte que, quand l'instant devient suffisamment grand, m tende vers 1, et le comportement se rapproche d'un comportement rigide-plastique parfait, voir la courbe uniaxiale [fig. 3.6-a].

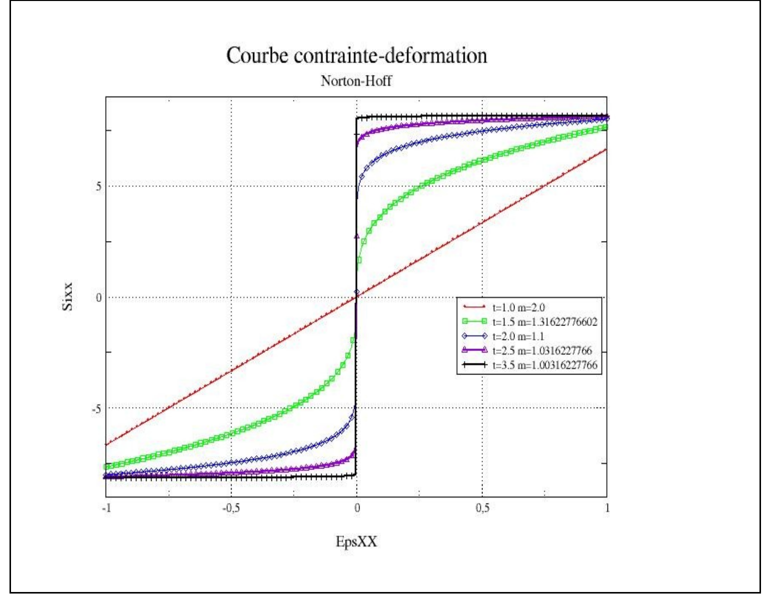


Figure 3.6-a. Courbe contrainte – déformation pour différentes valeurs de l'instant t

En pratique, on choisira au début une liste d'instants à pas constants (voir Tableau 2.6-a) avant de raffiner les pas de calcul en cas de non convergence.

t	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	…
$m=1+10^{1-t}$	2.00	1.30	1.10	1.03	1.01	

Tableau 3.6-a. Suite des valeurs de l'instant t **, et valeurs de** m **correspondantes.**

Le paragraphe [§4.4] présente l'évolution de l'écart entre les valeurs théoriques et calculées par *Code_Aster* pour le cas test SSNV124 [V6.04.124].

Si le document d'utilisation de la commande `POST_ELEM` avec le mot clé `CHAR_LIMITE` [U4.81.22] recommande, en pratique, de se limiter à des instants compris entre 1 et 2 pour ne pas avoir des calculs trop longs tout en permettant d'obtenir une borne supérieure de la charge limite suffisamment précise, nous observons que la charge limite inférieure nécessite au moins 2 à 3 itérations supplémentaires (instant supérieur à 3) pour converger vers les valeurs de référence lors des cas tests.

Le paragraphe [§ 4.4] présente l'évolution de l'écart entre les valeurs théorique et calculées par le *Code_Aster* pour le cas test SSNV124 [V6.04.124].

3.7 Calcul

La modélisation avec des éléments incompressibles doit nécessairement utiliser la commande `STAT_NON_LINE` [U4.51.03] et le mot clé `COMPORTEMENT`.

Pour l'analyse limite, il est obligatoire de faire appel aux opérandes suivants de la commande STAT_NON_LINE :

Mot clé facteur COMPORTEMENT Opérande RELATION ='NORTON_HOFF'	Cet opérande est utilisé pour décrire la relation de comportement de viscosité (indépendante de la température) dans le calcul de charges limites de structures, à seuil de Von Mises [U4.51.11]
Mot clé facteur PILOTAGE Opérande TYPE Mode 'ANA_LIM'	Ce mode de pilotage est spécifique au calcul de charge limite (loi NORTON_HOFF) par approche cinématique. Il doit être seulement appliqué à la charge déclarée via le mot-clé facteur EXCIT, opérande TYPE_CHARGE='FIXE_PILO'.

Le calcul de la charge limite peut requérir beaucoup d'itérations de recherche linéaire et d'itérations de Newton. Il est donc aussi fortement conseillé d'employer les différentes options de calcul de la commande STAT_NON_LINE pour améliorer la convergence, comme la recherche linéaire dont la pratique montre qu'il suffit d'avoir recours à 2 ou 3 itérations.

Remarque :

Si on amplifie l'intensité du chargement $L \to \beta L$ *(alors que l'on ne considère pas de chargement permanent* $L_0 = 0$ *), les solutions dépendent du facteur* β *selon les relations suivantes :*

$$u_m(\beta) = \beta^{-1} u_m(1) \quad ; \qquad \sigma^D(u_m(\beta)) = \beta^{1-m} \sigma^D(u_m(1)) \ .$$

À la convergence pour $m \to 1^+$ *, le chargement limite donné par la solution* $u_m(\beta)$ *est bien le même que celui donné par* $u_m(1)$ *, puisque* $\lambda_{\lim}(\beta) = \lambda_{\lim}(1)/\beta$ *.*

3.8 Post-traitement

A partir du résultat du calcul non linéaire réalisé, l'opérateur POST_ELEM [U4.81.22] et le mot-clé
CHAR_LIMITE produisent une table qui donne, pour chaque instant du calcul, l'estimation de la borne supérieure CHAR_LIMI_SUP ($\hat{\lambda}_m$) de la charge limite supportée par la structure ; cette suite est monotone décroissante quand $m \to 1^+$, c'est-à-dire quand $t \to +\infty$.

En outre, en l'absence de chargement permanent F_0 (opérande CHAR_CSTE = 'NON' qui est l'option par défaut), la table contient également l'estimation CHAR_LIMI_ESTIM ($\underline{\lambda}_m$) de la borne inférieure de la charge limite. Cette valeur (approximation de la jauge du convexe de résistance) n'est calculée qu'aux points de Gauss des éléments finis. Aussi la valeur $\underline{\lambda}_m$ obtenue pour chaque m , inférieure à $\hat{\lambda}_m$ [6], ne peut être considérée que comme une indication (cette suite n'est pas nécessairement monotone). Elle permet, avec la valeur par excès $\hat{\lambda}_m$, de fournir un encadrement de la charge limite du problème discrétisé.

En revanche, si un chargement permanent F_0 est présent (opérande `CHAR_CSTE = 'OUI'`), une telle estimation de la borne inférieure n’est plus disponible et la table indique alors la puissance `PUIS_CHAR_CSTE` du chargement constant dans le champ de vitesse solution du problème.

La visualisation du champ de déplacement obtenu pour une valeur du coefficient $m \to 1^+$ donne une « idée » du mode de ruine de la structure étudiée.

4 Quelques remarques de mise en œuvre

4.1 Cas test représentatif : SSNV146 a

4.1.1 Description

Ces remarques sont basées sur la mise en œuvre du cas test SSNV146A qui est tiré du benchmark du projet européen Brite EuRam BE97-4547 « LISA » [8]. Il s'agit du calcul de la charge limite d'un réservoir avec un fond tori-sphérique en 2D axisymétrique, sous pression interne, voir Figure 3.a. Le rayon interne de la partie cylindrique est : $49\ mm$, tandis que l'épaisseur est : $2\ mm$. Le rayon de la partie sphérique à l'apex est $98\ mm$, tandis que le rayon du tore de raccordement est de $20\ mm$.

Géométrie	Le réservoir axisymétrique à fond torisphérique (voir Figure 3.1-a) a les caractéristiques suivantes : • rayon interne de la partie cylindrique : $49\,mm$; • épaisseur : $2\,mm$; • rayon de la partie sphérique à l'apex : $98\,mm$; • rayon du tore de raccordement : $20\,mm$
Propriétés de matériau	Limite d'élasticité : $\sigma_y = 100\,MPa$
Conditions aux limites	Conditions de symétrie
Chargements	Pression interne de $1\,MPa$

Tableau 4.1-a : données du test SSNV146 (benchmark LISA) [8].

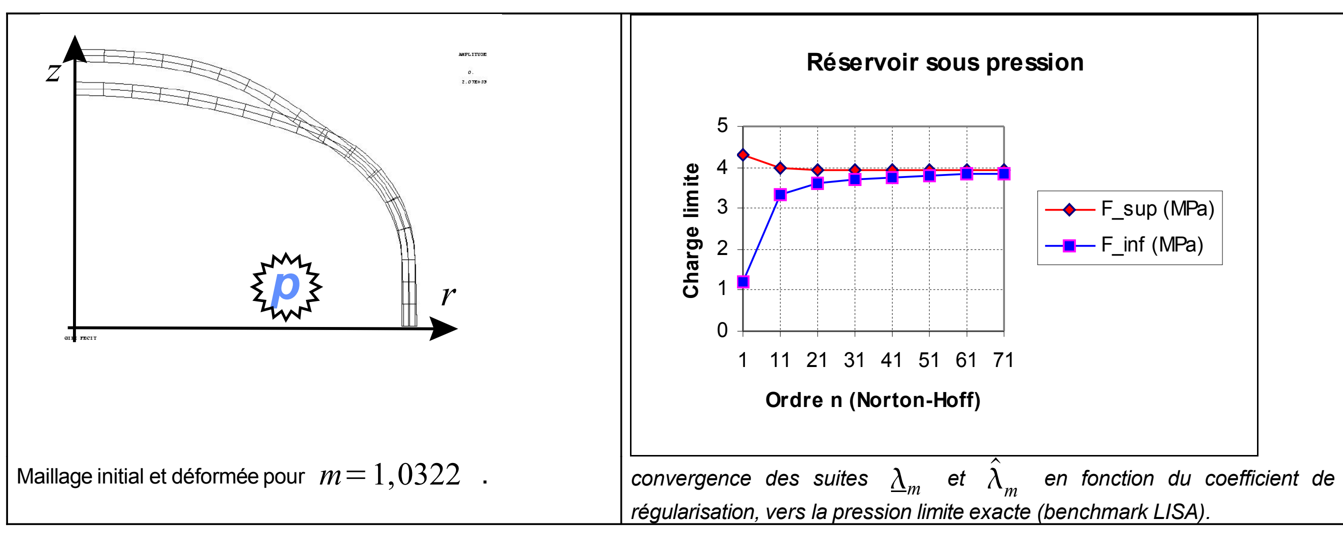
Le tableau suivant récapitule les résultats obtenus par les participants au benchmark utilisant le même maillage qui contient 34 éléments QUAD8 (dont deux éléments dans l'épaisseur) et 141 nœuds.

Modélisation		Valeur supérieure estimée	Valeur inférieure estimée
EDF	$m=1{,}0476$ (*) n=21	3.9514	3,6049
	$m=1{,}0322$ (*) n=31	3.9456	3,7090
	$m=1{,}0141$ (*) n=71	3.9404	3,8372
	$m=1{,}0099$ (*) n=101	3.9396	3.8673
Univ. de Liège/LTAS		3,931	néant
Centre de recherche FZJ		néant	3.997

Tableau 4.1-b : Résultats du benchmark LISA [8]

Nota (*) : le coefficient de régularisation par la loi de Norton-Hoff $n=(m-1)^{-1}$

La [Figure 4.1-a] présente l'évolution des termes des deux suites $\underline{\lambda}_m$ et $\hat{\lambda}_m$ en fonction du coefficient de régularisation $n=(m-1)^{-1}$ avec $m=1+10^{1-t}$, cf. [7]. Les bornes supérieure et inférieure de la charge limite estimée sont calculées avec la liste d'instants, jouant directement sur le coefficient de régularisation par la loi de Norton-Hoff. Ceci permet de réaliser directement cette convergence et simplifier l'utilisation.



Maillage initial et déformée pour $m=1{,}0322$.

convergence des suites $\underline{\lambda}_m$ et $\hat{\lambda}_m$ en fonction du coefficient de régularisation, vers la pression limite exacte (benchmark LISA).

Figure 4.1-a : résultats du calcul EDF effectué dans le cadre du benchmark LISA

Remarque :

> *Pour un tuyau de mêmes dimensions :* $P_{\lim}=4{,}0005\ MPa$.
> *Pour une sphère de mêmes dimensions :* $P_{\lim}=4{,}040\ MPa$.
> *On constate que ce test est « peu discriminant » d'un point de vue mécanique.*

4.1.2 Résultats du cas test SSNV146

Le maillage est celui utilisé pour le benchmark « LISA ». Le calcul a été mené jusqu'à l'instant $t=2\ s$. La version utilisée est la version d'exploitation STA 8.3.

```
 ---- TABLE: ECHL1    NOM_PARA: CHAR_LIMI_SUP

REFERENCE: NON_DEFINI
  OK    ECHL1              RELA          0.690  %  VALE:
3.9581130295563D+00
CHAR_LIMI_SUP            TOLE          1.000  %  REFE:
3.9310000000000D+00
```

La valeur de référence déclarée (3.931) est une valeur estimée pour la borne supérieure et elle a été fournie par l'université de Liège pour le benchmark « LISA », voir [Tab.3.1-b].

4.2 Calcul plus poussé

Pour améliorer l'estimation des valeurs supérieure et inférieure de la charge limite estimée, le calcul a été poussé plus loin jusqu'à l'instant *t* = 2.3 *s* (rappelons que ce n'est pas un temps physique, voir § 3.6) au-delà duquel le calcul ne converge plus.

INST		CHAR_LIMI_SUP $\hat{\lambda}_m$	CHAR_LIMI_ESTIM $\underline{\lambda}_m$
1.00000	$m=2,000$	4.30614	1.19383
2.00000	$m=1,100$	3.95811	3.27022
2.20000	$m=1,0631$	3.94001	3.48360
2.30000	$m=1,0501$	3.93413	3.56501

Tableau 4.2-a : Évolution des bornes sup et inf estimées de la charge limite. Maillage initial.

Quand on compare les résultats obtenus [Tab. 4.2-a] avec celles fournies par EDF l'ancienne version [Tab. 4.1-b], on observe que l'équivalence « *instant de calcul* » et « *coefficient Norton-Hoff* » ne semble pas être identique si l'on se base sur la charge limite supérieure ou la charge limite inférieure.

En effet, si la tendance décroissante (resp. croissante) de la charge limite supérieure (resp. inférieure) est confirmée ([Fig. 4.1-a]), alors, à $t=2.3s$, le coefficient Norton-Hoff équivalent serait supérieur à $n=101$ pour la valeur supérieure alors qu'il serait inférieur à $n=21$ pour la valeur inférieure.

4.3 Influence de la finesse des maillages

Le calcul du cas test avec le maillage initial ne converge plus après $t=2.3s$. Comme pour tout autre calcul en non-linéaire, le maillage a été raffiné pour tenter d'améliorer la convergence.

Ce calcul permettrait surtout de mieux approcher la charge limite par une meilleure estimation de la valeur inférieure.

Avec une discrétisation deux fois plus fine, soit un maillage de 136 éléments `QUAD8` (soit 4 éléments dans l'épaisseur), le calcul a été amené à convergence jusqu'à $t=2.85s$. Le temps CPU total nécessaire à l'exécution est de $6.25s$ dont $5.52s$ pour la commande `STAT_NON_LINE`.

INST (s)		CHAR_LIMI_SUP $\hat{\lambda}_m$	CHAR_LIMI_ESTIM $\underline{\lambda}_m$
1.00000	$m=2{,}000$	4.30541	1.14181
2.00000	$m=1{,}100$	3.97022	3.25097
2.49136	$m=1{,}0322$	3.94019	3.69005
2.70757	$m=1{,}0196$	3.93640	3.78280
2.85126	$m=1{,}0141$	3.93515	3.82449

Tableau 4.3-a : Évolution des bornes sup et inf estimées de la charge limite. Maillage fin.

L'écart relatif $\dfrac{\lambda_{\lim}^{\sup}-\lambda_{\lim}^{\inf}}{1/2\cdot(\lambda_{\lim}^{\sup}+\lambda_{\lim}^{\inf})}$ passe de 9.84% (maillage initial) à 2.85% avec le maillage plus fin.

On note aussi qu'aux mêmes instants ($t=1\ s$ et $2\ s$), on n'a plus exactement les mêmes valeurs supérieure et inférieure de la charge limite estimée avec le maillage initial [fig .4.1-a].

L'influence de la finesse du maillage se manifeste donc à la fois dans les valeurs estimées et dans la précision des calculs comme on peut mener ces derniers à la convergence pour des instants plus avancés.

4.4 Évolution de l'estimation avec la liste d'instants

Pour le cas test SSNV 146 a considéré, la valeur de référence n'est pas une valeur théorique mais issue elle-même d'un calcul numérique.

Le cas test SSNV124, décrivant une situation d'un solide 2D ou 3D chargé de manière homogène, permet de comparer les valeurs estimées par rapport à une solution analytique, voir [V6.04.124] (pour laquelle $\hat{\lambda}_m=\lambda_{\lim},\ \forall\ m$).

	erreur relative par rapport à la valeur de référence (en %)	
INST (s)	**Valeur sup**	**Valeur inf**
1.00	0.00	50.00
2.00	0.99	0.99
3.00	0.00	0.99
4.00	0.00	0.10
5.00	0.00	0.01

Tableau 4.4-a : Cas test SSNV124
Évolution de l'erreur relative pour les valeurs sup et inf estimées pour la charge limite

Le [Tableau 4.4-a] montre la convergence des valeurs supérieure et inférieure estimées vers la valeur analytique de référence. Cette convergence est lente pour la valeur inférieure estimée et elle est beaucoup plus rapide pour la valeur supérieure.

Ces résultats tendent à montrer que si l’on considère la moyenne des valeurs supérieure et inférieure on obtiendrait une valeur conservative de la charge limite estimée.

4.5 Problèmes présentant des symétries

Notons au passage une facilité importante dans la mise en œuvre. Bien que la charge limite λ_{lim} soit calculée sous forme d’une intégrale sur le domaine, il n’est pas nécessaire de multiplier la valeur obtenue si l’on fait le calcul sur une sous-partie du solide, cellule de symétrie du problème.

Nous l’illustrons avec une variante 3D de la modélisation C axisymétrique du cas test SSNV124.

Le cas représente ainsi un cylindre de rayon interne $a=1\,mm$ et externe $b=3\,mm$ soumis à une pression interne de $1\,MPa$ en paroi interne.

Le résultat théorique $\lambda_{\text{lim}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}.\sigma_y.\ln\frac{b}{a}$ donne une charge limite de $8.00377\,MPa$

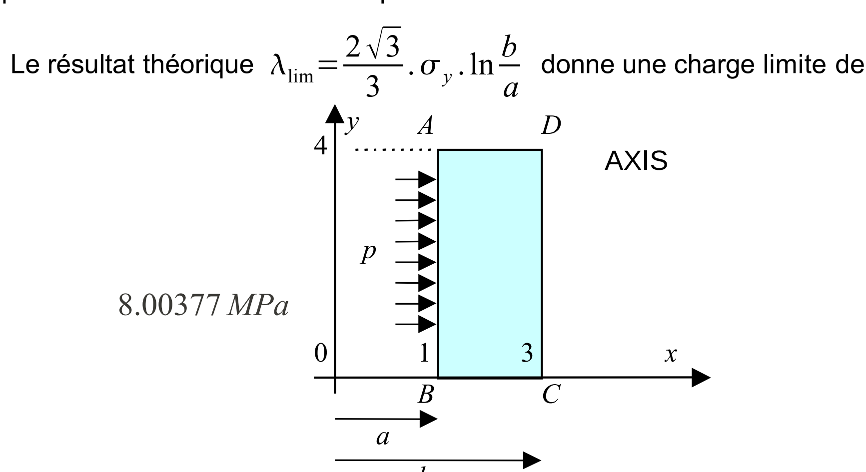


Figure 4.5-a : cylindre sous pression interne (test SSNV124c).

Avec le maillage du ¼ de cylindre présenté [Fig. 4.5-b], on peut lire dans le tableau ci-dessous directement les résultats des valeurs supérieure et inférieure de la charge limite estimée.

```
#TABLE_SDASTER
   NUME_ORDRE INST         CHAR_LIMI_SUP CHAR_LIMI_ESTIM
            1 1.00000E+000  8.00361E+000    2.34638E+000
            2 1.69897E+000  8.00360E+000    5.91927E+000
            3 2.00000E+000  8.00360E+000    6.84900E+000
            4 3.00000E+000  8.00360E+000    7.87601E+000
            5 4.00000E+000  8.00360E+000    7.99071E+000
            6 5.00000E+000  8.00360E+000    8.00231E+000
            7 6.00000E+000  8.00360E+000    8.00347E+000
```

```
          8 7.00000E+000  8.00360E+000    8.00359E+000
          9 8.00000E+000  8.00360E+000    8.00360E+000
```

Tableau 4.5-a : Évolution des bornes sup et inf estimées de la charge limite. Cas test SSNV124c.

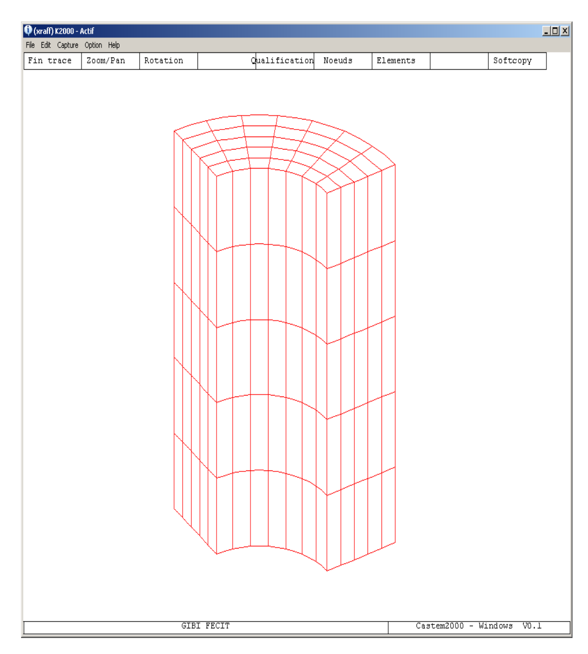


Figure 4.5-b : Maillage du quart de cylindre considéré (SSNV124).

4.6 Comparaison analyse limite et calcul élastoplastique incrémental jusqu'à la ruine sur un exemple

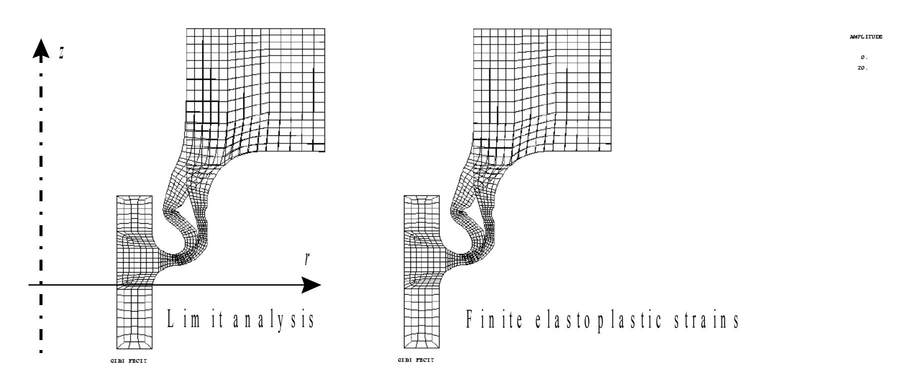
On sait qu'en élastoplasticité parfaite, l'opérateur tangent possède des valeurs propres nulles à partir d'un certain niveau de chargement en effort : cela signifie que le solide élastoplastique a atteint la ruine plastique.

Il peut être intéressant de faire un calcul élastoplastique (avec critère de von Mises) incrémental jusqu'à la ruine, afin d'obtenir une « borne » inférieure de la charge limite. Comme l'algorithme de Newton utilisé pour résoudre l'équilibre statique non linéaire diverge pour ce niveau de chargement, il faut utiliser un pilotage par longueur d'arc [R5.03.80], ou sur une variable de déplacement, servant à contrôler le chargement par la déformation du solide subie avant la ruine.

Voici un exemple industriel : il s'agit du calcul de la pression interne limite d'un Joint de cuve Canopy. Le problème est axisymétrique ; la pièce est bloquée sur sa frontière supérieure. La limite de résistance (forfaitaire) est fixée à $100\,MPa$; on admet un critère de von Mises. On a réalisé deux calculs :

- un calcul d'analyse limite avec la méthode présentée dans les paragraphes précédents ;

- un calcul incrémental élastoplastique parfait (sans et avec écrouissage), avec critère de von Mises en grandes transformations (Simo-Miehe, voir [R5.03.21]), afin de vérifier que le changement de géométrie ne modifie pas substantiellement la prédiction de pression limite.



calcul d'analyse limite

calcul incrémental élastoplastique en grandes transformations (Simo-Miehe)

Figure 4.6-a. Maillage déformé (amplifié)

La [Fig. 4.6-a] montre que les déformées calculées sont très voisines entre les deux méthodes et permettent de prédire le mode de ruine.

La [fig. 4.6-b] montre la convergence des suites des bornes de pression limite $\underline{\lambda}_m$ et $\hat{\lambda}_m$ en fonction du coefficient de régularisation de la méthode de calcul d'analyse limite, vers la pression limite exacte. La moyenne arithmétique des deux bornes semble constituer une bonne estimation de la pression limite. Pour la dernière valeur du coefficient de régularisation choisie, on a obtenu les valeurs reportées au [tab.4.6-a]. On les compare avec le calcul incrémental élastoplastique parfait en grandes transformations. On constate que les valeurs sont très proches.

analyse limite : borne inférieure	analyse limite : borne supérieure	calcul incrémental élastoplastique parfait
$18{,}72\ MPa$	$23{,}84\ MPa$	$23{,}25\ MPa$

pression interne (*MPa*)

au 4.6-a : Pressions limites.

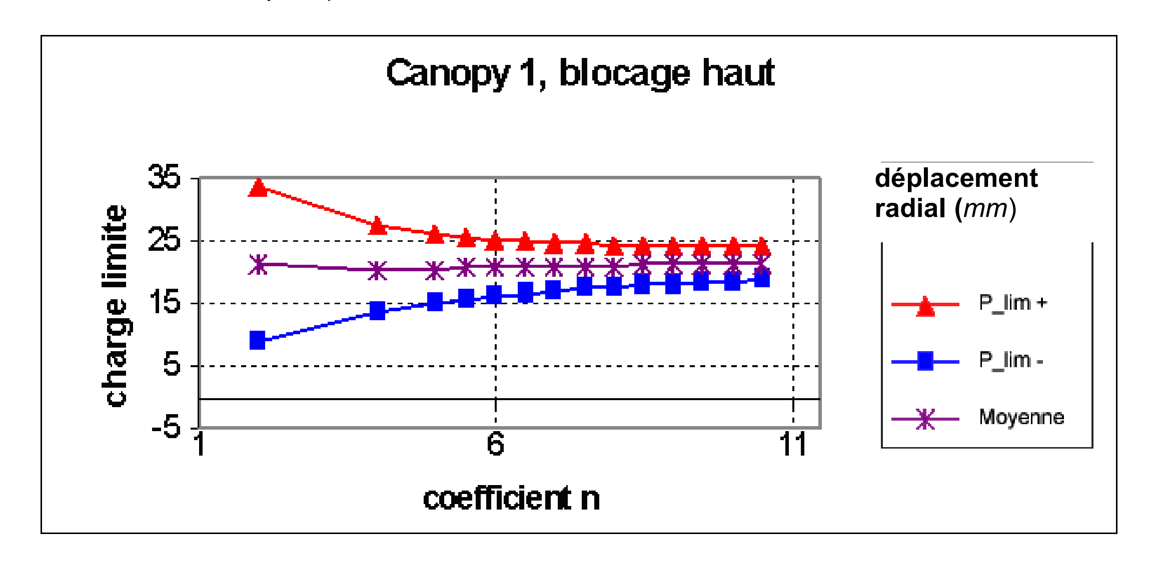


Figure 4.6-b. Calcul d'analyse limite : convergence des suites $\underline{\lambda}_m$ et $\hat{\lambda}_m$ en fonction du coefficient de régularisation, vers la pression limite exacte.

Le calcul incrémental élastoplastique parfait en grandes transformations a été réalisé avec deux types de pilotage :

- par un déplacement radial d'un point particulier ;
- par longueur d'arc (ce dernier pilotage ayant été plus performant en temps calcul) ;

et on l'a comparé les résultats avec ceux obtenus par un calcul en petites transformations.

Une des questions qui se pose est enfin l'effet de l'écrouissage du matériau, et donc du choix du seuil de résistance.

C'est pourquoi on a réalisé un calcul élastoplastique incrémental en tenant compte de la courbe de traction du matériau considéré (les paramètres principaux étant : $\sigma_y = 195\ MPa$, $\sigma_u = 520\ MPa$).

La [Fig. 4.6-c] permet de constater que sur ce cas les deux pilotages donnent une solution identique en grandes transformations, qui est plus « souple » qu'en petites transformations. La pression de ruine trouvée est supérieure à $56{,}4\ MPa$. Rapportée pour une valeur $\sigma_y = 100\ MPa$, on aurait « trouvé » : $28{,}9\ MPa$.

Cet exemple permet donc de jauger l'effet conservatif de la méthode d'analyse limite en ayant pris comme seuil de résistance la limite d'élasticité σ_y. Par contre, prendre la limite ultime σ_u comme seuil semble non conservatif, la structure subissant des changements de géométrie

substantiels dès qu’elle plastifie, avant la ruine, dans le trajet considéré pour le calcul incrémental.

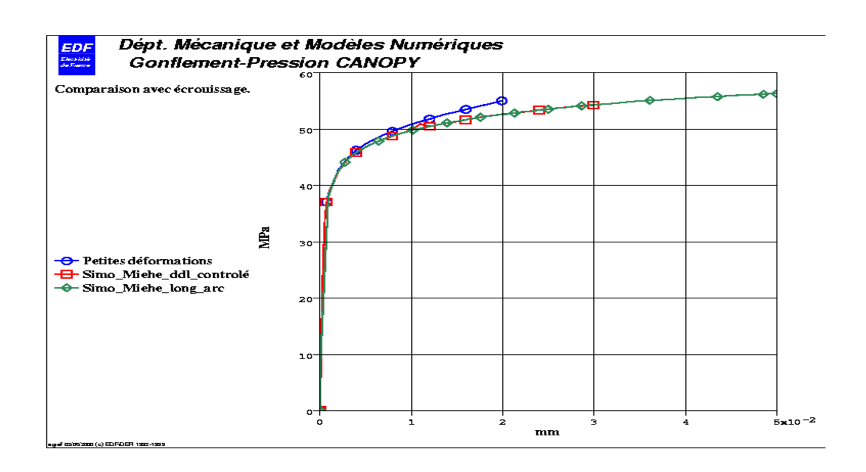


Figure 4.6-c. Calcul incrémental élastoplastique en grandes transformations (Simo-Miehe) avec deux types de pilotage, comparé avec un calcul en petites transformations.

5 Bibliographie

[1] [R7.07.01] *Calcul de charge limite par la méthode de Norton-Hoff-Friaâ* , 2007.

[2] [R3.06.08] *Éléments finis traitant la quasi-incompressibilité*, 2005.

[3] [R5.03.80] *Méthodes de pilotage du chargement*, 2001.

[4] [V6.04.124] SSNV124 – *Analyse limite régularisée. Loi de Norton-Hoff*, 2007.

[5] VOLDOIRE F. – *Analyse limite des structures fissurées et critères de résistance*, note EDF/DER HI-74/95/026, 1995.

[6] VOLDOIRE F. – *Limit analysis by the Norton-Hoff-Friaâ regularising method*. In M. Heitzer, M. Staat, LISA project report 2001, publication du *John von Neumann Institute for Computing* (2003).

[7] VOLDOIRE F. – *Calcul à la rupture et analyse limite des structures*, note EDF HI-74/93/082.

[8] LAHOUSSE A., VOLDOIRE F. – *Calcul de charge limite et benchmark du projet européen Brite EuRam « LISA »*, Note EDF/DER HI-74/98/026/A.

[9] SALENÇON J. – *Cours des structures anélastiques, calcul à la rupture et analyse limite* – Presses ENPC, 1983.

[10] SALENÇON J. – *De l'élastoplasticité au calcul à la rupture* – École Polytechnique, 2002.

[11] SAVE M.A., MASSONNET C.E., De SAXC É G. – *Plastic limit analysis of plates, shells and disks* – North Holland Series in Applied Math. & Mech., Elsevier, 1997.

[12] [R5.03.21] *Modélisation élasto(visco)plastique avec écrouissage isotrope en grandes déformations*, 2005.

limite